Министерство образования и науки РФ

Новосибирский Государственный Технический Университет

Кафедра ПМи

**Курсовой проект по численным методам**

Тема: «Решение эллиптической краевой задачи

методом конечных элементов»

Факультет: ПМИ

Группа: ПМ-23

Студентка:

Преподаватель: Персова М.Г.,Задорожный А.Г.

Новосибирск

2015

**1. Задание**

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

**2. Математическая модель**

Пусть дана эллиптическая краевая задача, определяемая дифференциальным уравнением:

*(1)*

C краевыми условиями на границах :

*-* первое краевое условие *(2)*

- второе краевое условие *(3)*

- третье краевое условие *(4)*

**2.1. Вариационная постановка в форме уравнения Галеркина**

Умножим скалярно уравнение *(1)* на пробную функцию  и проинтегрируем обе части уравнения по всей области :

,

Преобразуем первый интеграл по формуле Грина:

Интеграл по границе S разобьем на три интеграла по границам , на которых заданы краевые условия:

, функции построим такие, что на границе они равны 0.

- учет второго краевого условия

- учет третьего краевого условия

В итоге получим:

**2.2 Построение дискретного аналога**

Далее разобьем область 

Решение задачи будем искать в виде: , перебирая

получим:

где функции  есть базисные функции, которыми аппроксимируются функция u и f. После суммирования по всем функциям  получим СЛАУ относительно весов.

в которых символ – символ Кронекера (=1, если j=i иначе =0)

где матрица А представлена в виде суммы некоторых матриц.

 - матрица жесткости

 - матрица массы

. – вектор правой части.

**3. Базисные функции**

Разобьём область  на прямоугольники :

Рассмотрим один элемент, пронумеруем вершины следующим образом:

y

1

2

3

4



x

Рассмотрим билинейные базисные функции. Эти функции определяются следующим образом:

, ,

, ,

Локальные базисные функции на конечном элементе представляются в виде:

Таким образом каждая из функций равна 1 в одном из узлов и 0 в остальных. Значит вес  фактически является значением функции  в - ом узле сетки.

**4. Построение локальных матриц и локального вектора правой части.**

Рассмотрим следующие локальные матрицы:

– матрица жесткости

– матрица массы

*Матрица жёсткости:*



*Матрица массы:*



Вектор правой части:



**5.Сборка глобальной матрицы и вектора правой части**

Для занесения результатов сборки локальной матрицы в глобальную необходимо установить соответствие между локальной нумерацией узлов и глобальной.

m

m+1

k

k+1

1

2

3

4

На рисунке показано соответствие между локальной и глобальной нумерациями. Таким образом, изменения глобальной матрицы будут иметь вид:

Аналогично выполняется занесение результатов в вектор правой части.

**6. Краевые условия.**

**6.1.Кравевые условия первого рода**.

Для учета первых краевых условий в глобальной матрице и глобальном векторе находим соответствующую глобальному номеру краевого узла строку, и ставим вместо диагонального элемента глобальной матрицы достаточно большое число, а вместо элемента с таким номером в вектор правой части это число, умноженное на значение краевого условия.

Пусть в i-том узле задано первое краевое условие, тогда то -е уравнение СЛАУ примет вид , или .

**6.2.Краевые условия второго рода**

Учет краевого условия второго рода осуществляется за счет добавления в глобальный вектор правой части слагаемого , где ребро  принадлежит конечному элементу  и содержит узлы с номерами ,.

Вклад в вектор правой части будем вычислять по формуле:



После вычисления вектора его компоненты заносятся в глобальный вектор на позиции  и .

**6.3.Краевые условия третьего рода.**

При учете третьих краевых условий формируются локальная матрица и вектор правой части, которые заносятся в СЛАУ аналогично локальной матрицы конечного элемента и локального вектора правой части конечного элемента.

Вклад в матрицу:



Вклад в вектор правой части, при представлении на Г в виде разложения по базисным функциям :



**7. Формирование портрета глобальной матрицы.**

Портрет глобальной матрицы формируется при помощи дополнительного массива, в который заносятся все связи между узлами (назовем узлы связанными, если существует конечный элемент, содержащий каждый из них), затем под каждую пару связанных узлов выделяется память в глобальной матрице, построенной в разреженном строчном формате.

**8. Тестирование**

|  |  |
| --- | --- |
| № узла | Значение функции в узле |
| 1 | 1 |
| 2 | 3 |
| 3 | 5 |
| 4 | 2 |
| 5 | 6 |
| 6 | 10 |
| 7 | 3 |
| 8 | 9 |
| 9 | 15 |

Тест 1:

U = x\*y

Краевые условия первого рода

=2 = 1;

||r|| = 0

Тест 2:

U = cos(x)

Краевые условия первого рода

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| h | ||r|| | Кол-во итераций |
| =2, = 1; | 0.0844673 | 1 |
| =1, = 1/2; | 0.0448797 | 4 |
| =1/2, = 1/4; | 0,0223553 | 6 |

Тест 3:

|  |  |
| --- | --- |
| № узла | Значение функции в узле |
| 1 | -2 |
| 2 | -6 |
| 3 | -10 |
| 4 | 0 |
| 5 | 0 |
| 6 | 0 |
| 7 | 1 |
| 8 | 3 |
| 9 | 5 |

U = x\*y

Краевые условия первого рода.

Коэффициент  и функция U имеет разрыв в нуле:  

=2 = 1;

||r|| = 0